מאפייני השיח המתמטי הכיתתי של סטודנטיות להוראה: המקרה של הקורס 'פונקציות וגרפים'[2]

ד"ר מיכל טבח

אוניברסיטת תל אביב

tabachm@post.tau.ac.il

ד"ר טלי נחליאלי

מכללת לוינסקי לחינוך

talli.nachlieli@gmail.com

תקציר

מטרת המחקר היא לזהות תהליכי למידה והוראה של סטודנטים ומרצָה במכללה להכשרת מורים בקורס למתמחי מתמטיקה בעזרת כלי לניתוח שיח לימודי המשלב שתי תאוריות – האחת, בלשנית-חברתית והאחרת, תאוריה סוציו-תרבותית לחקר הלמידה. לשם כך צילמנו ושכתבנו את כל השיעורים בקורס 'פונקציות'. כלי המחקר שבו השתמשנו מאפשר להתמקד בשלושה סוגי שיח המתרחשים בו בזמן בכיתה: התוכני, הבין-אישי והפדגוגי. כל אחד משלושת סוגי השיח הוא בעל תרומה ייחודית ושונה. כדי להבין את המורכבות של תהליכי ההוראה והלמידה יש להתייחס לכל אחד מהשלושה ולקשר ביניהם. במאמר נציג מנגנון למידה-הוראה לפיתוח השיח המתמטי של הלומדים: חשיפה מפורשת של הנרטיבים והרוטינות הרלוונטיים לנושא המתמטי הנלמד.

מילות מפתח: שיח מתמטי כיתתי, שילוב תאוריות, נרטיבים ורוטינות, שיפוע של פונקציה

[2] מחקר זה (446/10) נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע.

מבוא

מאמר זה מתמקד בזיהוי תהליכי הלמידה וההוראה של סטודנטיות ומרצה במכללה להכשרת מורים בקורס למתמחי מתמטיקה. במאמר נחשוף מנגנון המאפשר שינוי בשיח המתמטי של הלומדים. למטרה זו צילמנו וניתחנו קורס של ארבעה-עשר שיעורים בנושא פונקציות. בקורס השתתפו שש-עשרה סטודנטיות הלומדות לקראת תואר ראשון ותעודת הוראה במתמטיקה לבית הספר היסודי. ניתוח הנתונים כלל בחינת השיח הכיתתי המשלב בתוכו את השיח המתמטי שהתפתח בין המשתתפות, את הבחירות הפדגוגיות של המרצה ואת השיח הבין-אישי שהתעצב בקהילה זו.

במוקד המאמר שתי דוגמאות עיקריות: האחת, שיחה בין הסטודנטיות לבין המרצה במהלך דיון במליאה. בעזרתה נדגים את התפתחות השיח המתמטי של הסטודנטיות בנושא שיפוע של פונקציה קווית. השנייה, דיון בין הסטודנטיות במהלך עבודה קבוצתית. בעזרתו נדגים את אי-ההתפתחות של השיח המתמטי שלהן. בניתוח הדוגמאות יש התייחסות לשיח המתמטי, הפדגוגי והבין-אישי של המשתתפות. הכלי המשמש לניתוח הוא תוצאה של שילוב שתי תאוריות – האחת, תאוריה לחקר הלמידה – קומוגניציה (Sfard, 2008), והאחרת, בלשנית Systemic Functional Linguistic (SFL) (Halliday, 1978).

סקירת ספרות

במחקר זה אימצנו את התאוריה הקומוגניטיבית, שהיא גישה סוציו-תרבותית לחקר הלמידה כמסגרת-על מקשרת[3] (overarching theory), ואת הגישה הבלשנית (SFL) כמסגרת המשובצת בתוכה (embedded theory). שילוב זה שימש אותנו לפיתוח כלי מתודולוגי המאפשר להתייחס לכמה היבטים של השיח המתמטי הכיתתי (Nachlieli & Tabach, 2012b). נוסף על כך נתייחס לתחום התוכן – הפונקציה הקווית בכלל והשיפוע בפרט.

1. הגישה הקומוגניטיבית

הגישה הקומוגניטיבית לחקר הלמידה מתייחסת לחשיבה כאל סוג של תקשורת בין-אישית. השם קומוגניציה (Commognition) מעיד על התייחסות מאחדת של החוקר לחשיבה (Cognition) ולתקשורת (Communication), כלומר ההתייחסות היא לחשיבה ולתקשורת בין-אישית כשני היבטים של אותה תופעה. חשיבה היא שיח של

[3] אחת הדרכים לרשת תאוריות הוצגה על ידי קויצ'ו (Koichu, 2013) והיא מתייחסת לשילוב תאוריות שאחת מהן היא מסגרת-על והאחרת משולבת בתוכה.

היחיד עם עצמו. על פי גישה זו **שיח** הוא אירוע כלשהו של תקשורת המתנהל על פי דפוסים ייחודיים, **ותקשורת** היא פעילות חברתית רוטינית ובה אוסף של פעולות לגיטימיות של היחיד. לכל פעולה כזו אוסף של תגובות לגיטימיות (Sfard, 2007, 2008). כל שיח מגדיר קהילת שיח שהמשתתפים בה מְתקשרים ופועלים על פי דפוסים מקובלים. ספרד (Sfard, 2007, 2008) טוענת כי אפשר להבדיל בין סוגי השיח המתפתחים בקרב קהילות מקצועיות למיניהן, כמו זו של המתמטיקאים, באמצעות התייחסות לארבעה מאפיינים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שִגרות (routines) ונרטיבים מקובלים.

מילים והשימוש בהן – כל שיח מקצועי מתבסס מבחינת המילים שבו על השפה הטבעית הנהוגה באותו מקום גאוגרפי. עם זה, לכל שיח יש מילים הייחודיות לו. למשל, בשיח המתמטי יש מילים אופייניות הקשורות לכמויות ולצורות. ייתכן שבסוגי שיח אחרים ישתמשו באותה מילה בכמה

דרכים, למשל, במילה 'קבוצה' משתמשים באופן שונה בשיח היום-יומי ובשיח המתמטי (Pimm, 1987).על פי ויטגנשטיין (Wittgenstein, 1953) מילים רבות אינן מצביעות על אובייקטים ספציפיים, והמושג 'משמעות של מילה' שקול לאופן שבו משתמשים במילה. המילים והשימוש בהן הן מאפיין עיקרי של שיח, שכן המילים אחראיות למה שהמשתמש רואה בעולם ומסוגל לומר לגביו.

מתווכים ויזואליים – מתווכים ויזואליים הם עצמים שעליהם פועלים כחלק מתהליך התקשורת. בעוד השיח היום-יומי מתווך בעיקר באמצעות עצמים מוחשיים הקיימים באופן בלתי תלוי בשיח, השיח המתמטי כולל לעתים קרובות עצמים אשר הומצאו במיוחד לצורכי תקשורת מתמטית, כמו סמלים המייצגים סְפָרות, פעולות וקשרים בין טענות, וכן גרפים ודיאגרמות המתארים קשרים בין משתנים למיניהם.

שִגרות (routines) – שגרות של שיח הן דפוסים שאותם אפשר לזהות ברצפים של שיח שבהם המשתתפים מגיבים לסיטואציה מוכרת. השגרות אינן בהכרח מנחות את התנהלות בני השיח, אלא בעזרתן הצופה יכול לתאר את פעולות המשתתפים שבהם הוא צופה. אחת השגרות הבית ספריות המקובלות היא אמירת 'בוקר טוב' על ידי המרצה כשהוא נכנס לכיתה, ותגובה מתאימה מצד התלמידים. אין תגובה אחת נכונה, אך יש אוסף של תגובות מתאימות וממנו המשתתפים בוחרים את תגובותיהם. אחת

השגרות המקובלות במתמטיקה היא זו העוסקת בקביעת נכונותן של טענות מתמטיות. כדי לקבל טענה כנכונה יש להוכיח אותה. אין הוכחה אחת בלבד וגם אין דרך אחת נכונה להוכיח, אך עצם קבלת הטענה כנכונה על סמך הוכחה מתמטית היא שגרה.

נרטיבים מקובלים (endorsed narratives) – נרטיבים מקובלים הם כל טקסט, דָבור או כתוב, שאנשי הקהילה הרלוונטית מקבלים אותו כנכון. במתמטיקה כל ההגדרות, ההוכחות והמשפטים הם נרטיבים מקובלים.

במסגרת זו **למידת מתמטיקה** היא שינוי בשיח המתמטי של הלומד, שינוי שעשוי לבוא לידי ביטוי בכל אחד מארבעת מאפייני השיח. שינוי זה יכול להיות ברמה של האובייקטים הדיסקורסיביים "מתוך" השיח או ברמת-על (שיח לגבי השיח). ההתפתחות ברמת האובייקט באה לידי ביטוי באמצעות הרחבה של מה שידוע לגבי האובייקטים המתמטיים שכבר קיימים בעולמו של היחיד. כלומר, מדובר בניתוח האובייקטים כדי לנסח ולקבל נרטיבים חדשים לגביהם. התפתחות זו כוללת הכרת מילים חדשות, נרטיבים מקובלים חדשים (כמו, למשל, משפטים מתמטיים לגבי אובייקטים מוכרים) ושגרות חדשות.

לעומת זאת, מקורה של התפתחות ברמת-על היא ברפלקציה לגבי שיח קיים בכללותו (שלא כמו רפלקציה על האובייקטים שלו). התפתחות זו כוללת שינויים בכללי-העל המנהלים את השיח. השיח החדש שמתפתח כתוצאה משינוי זה אינו בר-השוואה עם השיח הקודם. השיח החדש רחב יותר ומורכב יותר. השיח הקודם נתון כעת לכללים חדשים. במקרים רבים הצורך בשינוי הוא תוצאה של הכרת אובייקטים מתמטיים חדשים. למשל, כאשר מספרים חדשים, בין אם הרציונליים, השליליים, האי-רציונליים או המרוכבים מוצגים לראשונה, לא נראה שאפשר לקבל אותם אלא אם ישתנו הנרטיבים שהתקבלו קודם לכן. לדוגמה, כאשר מתחילים לעבוד עם מספרים שליליים אי אפשר יותר לטעון שכפל מגדיל או שחילוק מקטין, כלומר כללי-העל השתנו.

התפתחות כזו יכולה להתרחש באחת משתי דרכים: האחת, ובה איחוד של השיח הקיים עם שיח-העל לגבי שיח זה. כך למשל, אפשר לראות באלגברה הבסיסית איחוד של השיח האריתמטי עם השיח הפורמלי לגבי דגמים מספריים. התפתחות זו נקראת **התפתחות אנכית**. התפתחות מסוג אחר היא זו המאחדת סוגי שיח אחרים לכדי שיח אחד. כך למשל, אפשר להתייחס לשיח על פונקציות כאל איחוד של שיח חישובי, שיח על קווים במישור (גרפים) והשיח על ביטויים אלגבריים (Nachlieli & Tabach, 2012a).

מחקר זה עוסק בהתפתחות השיח המתמטי של סטודנטיות להוראה בנושא שיפוע של פונקציה קווית.

2. הגישה הבלשנית-החברתית (Systemic Functional Linguistics – SFL)

SFL היא גישה בלשנית-חברתית לחקר סמלים ומערכות סמלים. גישה זו פותחה על ידי הלידיי ואחרים (Halliday & Matthiessen, 2004; Martin & Rose, 2005). על פי גישה זו כל אמירה היא חלק מהֶקשר כלשהו, והארגון הדקדוקי של כל שפה טבעית משקף את התפקידים שבעבורם התפתחה השפה. ההנחה הבסיסית היא ששפה מהווה משאב וכל שימוש בה מייצג בחירה, לאו דווקא מודעת, של המשתמש לגבי כל אחת משלושת התִפקודים (meta-functions): (1) **תוכן** (ideation) – התייחסות ל**תוכן** של חוויה; (2) **בין-אישי** (interpersonal) – תיאור או בנייה של קשרים **בין-אישיים** שיש בהם עמדות וערכים; (3) **ארגון** (textual) - **ארגון** השפה לטקסט.

במחקר זה התאמנו את שלושת התִפקודים (תוכן, בין-אישי וארגוני) לשיח הכיתתי. בתפקוד התוכן יש התייחסות לתכנים המתמטיים (המילוליים והלא-מילוליים) – זהו השיח המתמטי; בתפקוד הבין-אישי יש התייחסות למיצוב של היחיד כלפי אחרים וכלפי המתמטיקה; בתפקוד הארגוני קיימות הפעולות הפדגוגיות שהמרצה מבצעת כדי לארגן את התכנים ולעזור ללומדים להיות משתתפים מרכזיים יותר בשיח המתמטי הכיתתי – זהו השיח הפדגוגי.

3. כלי מתודולוגי לניתוח השיח הכיתתי

כדי לזהות תהליכי הוראה ולמידה בקורס 'פונקציות' השתמשנו בכלי ייחודי (נחליאלי ורגב, 2009; Tabach & Nachlieli, 2011) המשלב בין שתי התאוריות המוצגות לעיל ומאפשר התייחסות בו בזמן למגוון היבטים של השיח שהתפתח בכיתה: השיח המתמטי, השיח הבין-אישי והשיח הפדגוגי, ולארבעת המאפיינים של כל אחד מהיבטי השיח (ראו טבלה1).

טבלה 1: כלי לניתוח שיח מתמטי כיתתי

היבטי השיח	מילים והשימוש בהן	מתווכים ויזואליים	נרטיבים מקובלים	רוטינות
שיח מתמטי	המילים המתמטיות שבהן משתמשים בכיתה.	המתווכים שבהם משתמשים במתמטיקה.	ההיגדים המתמטיים הנאמרים בשיעור.	השגרות המתמטיות שמזהים בשיעורים.
שיח בין-אישי	המילים שבעזרתן היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	המתווכים שבעזרתם היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	הנרטיבים שבעזרתם היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	השגרות שבעזרתן היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.
שיח פדגוגי	המילים שבעזרתן היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.	המתווכים שבעזרתם היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.	הנרטיבים שבעזרתם היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.	השגרות שבעזרתן היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.

4. מושג הפונקציה במחקר

תכנית הלימודים במתמטיקה מציינת כי "מושג **הפונקציה** הוא מושג יסודי השזור לאורך הלמידה בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה" (מבוא לתכנית, 2008). ואכן, מושג זה נחקר רבות בחמישים השנים האחרונות. אפשר לזהות כמה מעברים שהתרחשו לאורך השנים. תחילה התמקדו החוקרים בידע של היחיד בזמן נתון (Even, 1990; Piaget, 1977; Zaslavsky, Sela & Leron, 2002), ולאחר מכן עברו לבחינת תהליך הלמידה עצמו (Schoenfeld, Smith III & Arcavi, 1993); מהסתכלות קוגניטיבית על הלמידה (Schoenfeld, Smith III & Arcavi, 1993) עברו לבחינה סוציו-תרבותית של התהליך (Moschkovich, 2004); ממחקר שנערך על יחידים ובתנאי מעבדה (Schoenfeld, Smith III & Arcavi, 1993) למחקר כיתה (Nachlieli & Tabach, 2012a; Walter & Gerson, 2000); מסביבות למידה שיש בהן נייר ועיפרון לסביבות טכנולוגיות (Schwarts & Hershkowitz, 1999; Yerushalmy, 2006). ועדיין, מחקרים המתמקדים בתהליכי למידה בכיתה – מועטים. במחקר כיתה אפשר להתמקד בלמידה, בהוראה או ביחסי הגומלין בין השתיים, וכן לבחור אם להתמקד במליאת הכיתה או בקבוצה.

המחקר המדווח במאמר זה אימץ תפיסה סוציו-תרבותית ללמידה, והוא מתבונן בתהליכי למידה-הוראה במליאת הכיתה ובקבוצות עבודה במהלך סמסטר שלם.

שאלת המחקר

השאלה המרכזית המובילה מחקר זה היא: כיצד מתפתח שיח חדש משיח קודם של הלומדים?

כדי לענות על שאלה זו ניסחנו שלוש תת-שאלות:

- מהם השינויים הניתנים לזיהוי בשיח המתמטי של הסטודנטיות? נבחן את התפתחותם של מאפייני השיח המתמטי של הסטודנטיות.
- מה אִפשר את ההתפתחות? נבחן את פעולות המרצָה ואת פעולות הסטודנטיות אשר נראה שאפשרו את השינויים שזוהו.
- מה עיכב את ההתפתחות? נבחן את פעולות המרצה ואת פעולות הסטודנטיות אשר נראה שעיכבו התפתחות רצויה.

השיטות

1. המשתתפות

מחקר זה עקב אחרי משתתפות הקורס 'פונקציות וגרפים', קורס חובה הנלמד במהלך הסמסטר הראשון בשנה א ללימודים במסלול מתמחי מתמטיקה בבית הספר היסודי. המרצה בקורס היא בעלת תואר דוקטור בהוראת המתמטיקה ובעלת ותק של כעשר שנים בהוראה במכללה. בקורס השתתפו שש-עשרה סטודנטיות בעלות תעודת בגרות מלאה שבה לפחות 3 יחידות לימוד במתמטיקה.

2. הנתונים ואיסופם

שתי חוקרות צפו בשיעורים וערכו רשימות שדה. כל השיעורים בקורס תועדו בווידאו ושוכתבו במלואם. נוסף על כך נאספו תוצרים כתובים של הסטודנטיות (ובכלל זה שיעורי בית ומחברות) ונערכו ראיונות עם המרצה לפני השיעורים כדי לברר מהן מטרות ההוראה של כל שיעור. במאמר זה נציג ממצאים העולים מניתוח השכתובים.

3. ניתוח הנתונים

בניתוח הנתונים הראשוני היו שלושה שלבים:

א. זיהינו את כל הקטעים בשיחות שהתקיימו בכיתה (מליאה ועבודה בקבוצות) שבהם יש עדות לשינוי בשימוש של התלמידות במילים מתמטיות, בנרטיבים שהן מנסחות או ברוטינות הפעולה שלהן.

ב. בקטעים האלה אפיינו את השינוי בשיח המתמטי של הלומדות.

ג. זיהינו את פעולות המורה ואת פעולות התלמידות אשר נראה שאפשרו את השינוי.

הניתוח הראשוני הסתיים בזיהוי מנגנוני למידה. מאמר זה מתמקד במנגנון המעודד למידה, ובכלל זה חשיפת הנרטיבים המתמטיים הרלוונטיים לנושא המדובר. הדוגמה הראשונה המוצגת במאמר מדגימה תהליך שבו חל שינוי בשיח של הלומד בעקבות חשיפה של נרטיבים.

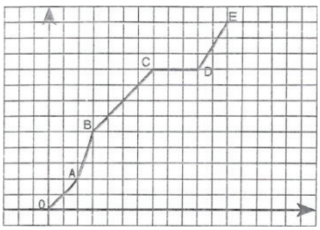
בשלב השני של ניתוח הנתונים בחנּו עבור אותם קטעי שיעור שבהם לא הייתה עדות ללמידה אם חשיפה של הנרטיבים הרלוונטיים הייתה מאפשרת שינוי. בדוגמה השנייה המוצגת במאמר אין עדות ללמידה, ונראה שהגורם לכך הוא היעדר חשיפה של נרטיבים אלו במפורש.

הממצאים

בחלק זה נציג שתי דוגמאות הלקוחות משיח כיתתי בנושא **שיפוע של פונקציה**. בעזרת הדוגמה הראשונה נתאר את התפתחות שיח הסטודנטיות במהלך דיון עם המרצה, ואילו בעזרת הדוגמה השנייה נדגים דיון שבו הסטודנטיות לא הצליחו לקדם את השיח המתמטי-הקבוצתי.

1. דוגמה ראשונה

דוגמה זו לקוחה מהשיעור הראשון שבו עסקו בנושא שיפוע של פונקציה קווית (שיעור 7). הסטודנטיות קיבלו משימה ועליה עבדו בקבוצות. הן נדרשו לקבוע עבור גרף נתון (איור 1) איזה מהקטעים הוא התלול ביותר. מטרת המשימה הייתה לעורר את הצורך בחישוב שיפועי קטעים. ננתח את המטלה מנקודת מבט קומוגניטיבית. קטעי הגרפים הם האובייקטים המתמטיים ויש צורך בהגדרה של רוטינה אשר על פיה יהיה אפשר לקבוע מהו הקטע התלול ביותר או בשפה מתמטית – איזה קטע הוא בעל השיפוע הגדול ביותר. הרוטינה המתאימה צריכה לנבוע מהגדרה של שיפוע, כלומר מכלל-על המתייחס לשימוש במילה שיפוע.



<u>**איור 1:** איזה מהקטעים תלול ביותר?</u>

דיון המליאה הבא התקיים לאחר עבודה בקבוצות קטנות על המשימה וכלל את הצגתם של שני רעיונות לפתרון משימת השוואה בין תלילות הקטעים, והשוואה בין הרעיונות. הדוגמה מחולקת לשלושה חלקים, והשיח המתמטי בכל חלק מנותח בנפרד. ההתייחסות לסוגי השיח הפדגוגי והבין-אישי מופיעה במשותף לאחר שלושת חלקי הדוגמה.

1.1 חלק I - הרעיון של נעמי

תור	דובר	מה נאמר (מה נעשה)
49.	נעמי:	אני כאילו עבדתי בשיטה מפגרת.
50.	המרצה:	באיזו שיטה?
51.	נעמי:	שאמרתי שכאילו ב-x אחד, נגיד הקטע AB, אז ב-x אחד הוא עלה המון
52.	המרצה:	רגע, רגע, רגע. אני רוצה שאתן כולכן תקשיבו לנעמי, ונעמי מנסה להסביר לנו למה... מה הקטע שאמרת שהוא הכי תלול?
53.	נעמי:	AB
54.	המרצה:	בואי תַראי את זה על הגרף. בואי, בואי, בואי. נעמי רוצה להסביר משהו ו... איזושהי שיטה שהיא עבדה לפיה. בואי, תעמדי איפה שאני עומדת, ועם העט את יכולה להראות פה על ה... את רואה, הקטע AB הוא פה... בואי, תראי להם [נעמי ניגשת למטול. מצביעה עם העט לעבר קטע AB בגרף.]
55.	נעמי:	קטע AB הוא עלה כאילו רק אא.. רק ב-x הזה [תנועת יד במקביל לציר x באורך יחידה] הוא עלה המון [תנועת יד במקביל לציר y לאורך שלוש יחידות.]
56.	המרצה:	זאת אומרת, מה את אומרת, שהתקדמת מ-A, מהנקודה A אל הכיוון החיובי של ציר ה-x יחידה אחת [תנועת יד במקביל לציר x באורך יחידה] [המרצה מצביעה עם העט על הקטע AB.]
57.	נעמי:	כן
58.	המרצה:	מה ראית, שהוא עלה בכמה?
59.	נעמי:	שלושה y [תנועת יד של המרצה במקביל לציר y לאורך שלוש יחידות.]
60.	המרצה:	זאת אומרת ה-y השתנה בשלוש [תנועת יד של המרצה לאורך הקטע שעל הגרף]
61.	נעמי:	כן
62.	המרצה:	כשה-x השתנה באחד, ה-y השתנה בשלוש
63.	המרצה:	לעומת זאת, בקטעים האחרים, זה מה?
64.	נעמי:	נגיד ב-OA וב-BC
65.	המרצה:	OA, תראי ב-OA, מה קורה ב-OA?
66.	נעמי:	זה שווה כי יש פה אותה עלייה, שני x, שני x.
67.	המרצה:	זאת אומרת, מה יש ב-OA? כש-x עלה ב...‚ כש-x גדל באחד בכמה ה-y השתנה?

.68	תלמידה:	באחד
.69	המרצה:	תודה רבה, נעמי [בציניות]
...		
.99	המרצה:	אתם צריכים, נעמי, את חושבת מאוד יפה אבל את צריכה להתנסח יותר מדויק מתמטית.

השיח המתמטי

נתייחס לנרטיבים ולרוטינות המתמטיות.

נרטיבים. הנרטיב המתמטי שאותו ניסתה המרצה לנסח בעזרת הסטודנטיות נאמר בתור 62. זהו נרטיב מרכזי מבחינת מציאת שיפוע של פונקציה קווית שהמתווך הוויזואלי שלה הוא גרף. כדי לעקוב אחר התפתחות הנרטיב נבחן את תורי הדיבור שבהם יש אמירות לגבי נרטיב זה.

51	נעמי:	שאמרתי שכאילו **ב-x אחד***, נגיד הקטע AB, אז **ב-x אחד הוא עלה המון**
...		
.55	נעמי:	**... רק ב-x הזה** [תנועת יד במקביל לציר x באורך יחידה] **הוא עלה המון**
.56	המרצה:	**... שהתקדמת מ-A, מהנקודה A אל הכיוון החיובי של ציר ה-x יחידה אחת** [תנועת יד]
.57	....	
.58	המרצה:	**... הוא עלה בכמה?**
.59	נעמי:	**שלושה y** [תנועת יד]
.60	המרצה:	**ה-y השתנה בשלוש** [תנועת יד]
.61	נעמי:	כן
.62	המרצה:	**כשה-x השתנה באחד, ה-y השתנה בשלוש**
.66	נעמי:	זה שווה כי יש פה אותה עלייה, **שני x, שני x**.
.67	המרצה:	זאת אומרת, מה יש ב-OA? כש-x עלה ב..., **כש-x גדל באחד, בכמה y השתנה?**

* מטרת ההדגשות היא להתמקד בחלקי האמירה הקשורים לנרטיב.

הנרטיב של נעמי לגבי מציאת הקטע התלול ביותר נאמר לראשונה בתורי דיבור 51 ו-55. הנרטיב נוסח בצורה איכותנית תוך שימוש במילים לא מדויקות (ב-x הזה, המון), וההבהרות לגביהן ניתנו בעזרת תנועות ידיים. בתור הבא (56) ניסחה המרצה את הנרטיב בצורה בהירה יותר בעזרת שימוש במילים מתמטיות. כמו כן היא תיארה במילים את תנועות הידיים של הסטודנטית תוך התייחסות לציר x. לשם כך היא ביקשה מהסטודנטית לכמת את השינוי (58) שאותו ביטאה הסטודנטית כתנועת יד לאורך ציר y ובעזרת המילים 'שלושה y' (59). המרצה ניסחה מחדש אמירה זו

כשאמרה: "ה-y השתנה בשלוש" (60, 62). אמירות אלו הביאו לניסוח הנרטיב המקובל מתמטית שאותו ביטאה המרצה (62). על אף הניסוח המחודש של המרצה, בדוגמה זו אין עדות לשינוי בשיח של נעמי, ובתור 66 היא תיארה את השינוי בערכי ה-x "שני x, שני x" באופן שקול לדרך שבה תיארה את השינוי בערכי ה-y (59). המרצה ניסחה מחדש שינוי זה באופן מתמטי: "כשה-x גדל באחד בכמה ה-y השתנה?" (67).

רוטינות. נעמי התייחסה לנרטיב המוצע בחלק זה כאל "שיטה" (49). כלומר, ייתכן שעבורה זוהי הרוטינה לזיהוי הקטע התלול ביותר. בתור 67 ניסחה המרצה נרטיב שאליו התייחסה כאל רוטינה להשוואה בין תלילות של קטעים. בהמשך השיעור חזרה המרצה על שאלה זו במקרים אחרים שבהם נדרשה השוואה בין תלילות של קטעים או מציאת שיפוע של קטע. כך הפך הנרטיב לרוטינה המקובלת בכיתה.

1.2 חלק II – הרעיון של אריאל

100	אריאל:	אני אגיד לך מה אנחנו רשמנו?
101	המרצה:	כן, בטח שתגידי
102	אריאל:	רשמנו את זה יותר בתור כלל, לא בתור הסבר. רשמנו אא...
103	המרצה:	אני רוצה שתקשיבו לאריאל ותגידו לי מה דעתכן על ההסבר שלה.
104	אריאל:	רשמנו שככל שהמרחק בין ה-xים קָטֵן וה-yים גָּדֵל, השיפוע גדול יותר
105	המרצה:	אבל זה נראה לי קצת יותר מסובך מלהסתכל פֶּר יחידה
106	אריאל:	אני יודעת שככל שה-x הוא יותר קטן וה-y יותר גדול השיפוע שלי יהיה גדול
107	המרצה:	או-קי. זה נכון?

השיח המתמטי

נרטיבים. ניסוח הנרטיב של אריאל (104) נעשה בשפה מתמטית תהליכית: "ככל ש..." והתייחס להשוואה בין מרחקים. האובייקט שלגביו נוסח הנרטיב הוא המרחק בין ה-xים או ה-yים, ולא השינוי הכמותי של x. ההתייחסות היא לשינוי בו בזמן של המרחק בין ה-xים ובין ה-yים. אף על פי שהנרטיב אינו מנוסח באופן המקובל במתמטיקה הוא נכון מבחינה מתמטית.

הניסוח שלהלן של הנרטיב (106) התייחס לאובייקטים אחרים – x ו-y, אשר גְּדֵלים או קְטֵנים בלי התייחסות למרחק. נרטיב זה אינו נכון מבחינה מתמטית. נוסף על כך אריאל משתמשת כאן במילה 'אני' לעומת 'רשמנו' (104), כלומר היא משנה את תפקידה ממייצגת הקבוצה למייצגת את עצמה.

מה גרם לשינוי המהותי בניסוח הנרטיב בתוך שני תורי דיבור כמעט רצופים? ייתכן שהסיבה נעוצה במשוב שהמרצה נתנה בתור 105: **"אבל זה נראה לי קצת יותר מסובך מלהסתכל פֶּר יחידה"**. אף על פי שהמרצה לא קבעה באופן נחרץ כי הנרטיב שאריאל הציעה שגוי, שתי מילות מפתח העבירו לה את המסר כי המרצה דחתה את הנרטיב – **אבל, יותר מסובך**. מילים אלו מבטאות התנגדות לרעיון החדש בהשוואה לקודמו.

רוטינות. בחלק זה לא מנוסחת רוטינה שלפיה אפשר להשוות בין תלילות של קטעים. ייתכן שהסיבה לכך שהמרצה לא קיבלה את הנרטיב של אריאל היא שאי אפשר לנסח ממנו באופן ישיר רוטינה שעל פיה יהיה אפשר להשוות שיפועים של קטעים.

1.3 חלק III – עימות הרעיונות

113	המרצה:	מה הבעיה של ההסבר של אריאל לעומת ההסבר של נעמי?
114	גל:	שההסבר של נעמי הוא ספציפי יותר ל [...]
115	המרצה:	של נעמי הוא ספציפי ל-AB, או אפשר גם להכיל אותו על DE?
116	הסטודנטית:	לא, הוא כאילו
117	המרצה:	זה הסבר שאפשר לבדוק אותו על כל... על כל ישר?
...		
129	הסטודנטית:	ה-y גדֵל, נקודה.
130	המרצה:	במה... ואצלך [לאריאל], אפשר לבדוק את זה? זה משהו שנותן לי איזושהי אפשרות לבדוק? למדוד?
131	אריאל:	לא. לא באופן ספציפי.
132	המרצה:	או-קי. אז לכן, ממ... צריך לראות מה יכול יותר לעזור לנו
133	אריאל:	אולי לעבוד לפי יחידות, להגדיר את זה לפי יחידות.
134	המרצה:	אז או-קי, אז בואו נמשיך, בואו נראה איך אנחנו מגדירים את זה בתור יחידות. באיזה קטע השיפוע הוא הגדול ביותר?

השיח המתמטי

בקטע שיח זה עימתה המרצה בין הנרטיבים שהוצגו – של נעמי ושל אריאל. התייחסות המרצה לנרטיבים אינה סימטרית, והשאלה נוסחה כך שהסטודנטיות הוזמנו להראות בעיה הקיימת בנרטיב אחד לעומת האחר (113). המרצה הציעה כלל-על מתמטי לבחירת נרטיב – יכולת ההכללה למקרים אחרים, כלומר נוסף על הדוגמה הפרטית שבה דנו, מי משני הנרטיבים מאפשר מדידה (130) ביחידות (134). על פי הגישה הקומוגניטיבית המרצה מחפשת רוטינה שאותה יהיה אפשר להפעיל על כל ישר, כלומר המרצה מחפשת פעולות שאותן אפשר לבצע על האובייקטים המתמטיים. עדויות לכך הן השימוש שלה בפעלים של "עשייה": "זה משהו שנותן לי איזושהי אפשרות **לבדוק**? **למדוד**?" (130)

1.4 השיח הפדגוגי

ננתח כעת את השיח הפדגוגי כפי שהוא מצטייר משלושת חלקי הדוגמה. השיח הפדגוגי כולל רוטינות מרצה, שלדעת החוקרות מטרתן לעזור לסטודנטיות לפתח את השיח המתמטי שלהן. רוטינות מרצה הוגדרו כפעולות של המרצה אשר חזרו על עצמן פעמים רבות במהלך הקורס. שלוש רוטינות פדגוגיות מוצגות במאמר זה: (1) עידוד הסטודנטיות להעלות רעיונות מתמטיים; (2) חלוקת תפקידים; (3) חזרה על קולן של הסטודנטיות – Revoicing.

(1) עידוד הסטודנטיות להעלות רעיונות מתמטיים

רוטינה זו מתייחסת לפעולות של המרצה ומטרתן ליצור סיטואציות שבהן הסטודנטיות יציעו את הרעיונות המתמטיים המרכזיים של הקורס. רוטינה זו זוהתה בתורי הדיבור 52, 54, 101, 103 ו-113.

למשל, בתור 52 סימנה המרצה רעיון שאותו הציעה נעמי כרעיון מרכזי בכך שביקשה את תשומת לִבן של הסטודנטיות האחרות. בתור 54 היא נתנה לנעמי את הבמה בכך שביקשה ממנה במפורש לעמוד במקום של המרצה בכיתה ולהשתמש בעט שלה כדי להתייחס לגרף המופיע על גבי השקף המוקרן. רעיון זה התפתח מאוחר יותר לכדי הנרטיב המרכזי למציאת שיפוע.

(2) חלוקת תפקידים

רוטינה זו מתייחסת לניהול ולארגון התפקידים של המשתתפות בשיעור. רוטינה זו זוהתה בתורי הדיבור 52, 54, 101, 103, 105 ו-113.

למשל, בתור 52 חילקה המרצה לכל אחת מהמשתתפות בשיעור תפקיד: נעמי קיבלה את תפקיד המסבירה, שאר הסטודנטיות – את תפקיד המקשיבות, והמרצה ניהלה את הסיטואציה. לאחר מכן בתור 54 פירטה המרצה כיצד נעמי אמורה למלא את תפקידה.

בנתינת הבמה לנעמי היו שני היבטים – מנטלי ופיזי. בתור 52 סימנה המרצה את הרעיון של הסטודנטית כמרכזי בכך שהיא ביקשה את תשומת הלב של הסטודנטיות. זהו סימון מנטלי של הסטודנטית כמשתתפת מרכזית. בתור 54 הוסיפה המרצה פן פיזי למרכזיות הרעיון של הסטודנטית בכך ששינתה את מיקומה של הסטודנטית – היא ביקשה ממנה לעמוד לפני הכיתה במקומה של המרצה. נוסף על כך היא נתנה לה את העט שלה כדי שתיעזר בו בהתייחסותה לגרף שעל גבי השקף.

(3) חזרה על קול הסטודנט – Revoicing

ברוטינה זו יש אמירות שמטרתן לחזור, להחליף, לסכם, להרחיב ולתרגם את דברי המשתתף (Forman & Ansell, 2002; O'Connor & Michaels, 1996). בדוגמה זו חזרה המרצה על קולה של הסטודנטית בשתי הזדמנויות: 55-62 ו-66-67. כדי להבליט את החזרה ואת השינוי בדברי המרצה הצגנו את ניתוח התורים האלה בעזרת הטבלה שלהלן (טבלה2). דברי הסטודנטית מופיעים בעמודה הימנית ודברי המרצה, שאפשר להתייחס אליהם כאל חזרה על קולה של הסטודנטית, מופיעים בעמודה האמצעית. בעמודה השמאלית מופיעה ההתייחסות שלנו.

טבלה 2: חזרה על קול הסטודנטית בתורי הדיבור 55-62

נעמי	מרצה	הערות
55. קטע AB הוא עלה כאילו רק אא... רק ב-x הזה [תנועת יד במקביל לציר x באורך יחידה]	56. **זאת אומרת**, **מה את אומרת**,* שהתקדמת מ-A, מהנקודה A אל הכיוון החיובי של ציר ה-x יחידה אחת [תנועת יד במקביל לציר x באורך יחידה. המרצה מצביעה עם העט על הקטע AB].	המרצה חזרה על קול הסטודנטית "רק ב-x הזה" על ידי: (1) המללה של תנועות היד של הסטודנטית (למשל, "אל הכיוון החיובי של ציר ה-x"); (2) שימוש באובייקטים המתמטיים המתאימים (למשל, נקודה A, כיוון); (3) ניסוח מתמטי של הרעיון שהמרצה מנסה להורות (למשל, "יחידה אחת").
55. הוא עלה המון [תנועת יד במקביל לציר y לאורך שלוש יחידות.]	58. מה ראית, **שהוא עלה בכמה?**	המרצה חזרה על קול הסטודנטית כדי ללמד את הניסוח המתמטי המקובל של הנרטיב הרצוי. היא עשתה זאת באמצעות שינוי של ניסוח הסטודנטית ("הוא עלה המון" זוכה לתגובה "**שהוא עלה בכמה?**") השינוי הנדרש במקרה זה הוא משיח יום-יומי איכותי לשיח מתמטי כמותי.
59. שלושה [תנועת יד של y המרצה במקביל לציר ה-y לאורך שלוש יחידות.]	60. **זאת אומרת**, ה-y השתנה בשלוש [תנועת יד של המרצה לאורך הקטע שעל הגרף]	המרצה חזרה על קול הסטודנטית "שלושה y" בניסוח המתמטי המקובל "y השתנה בשלוש".
	62. כשה-x השתנה באחד, ה-y השתנה בשלוש.	המרצה איחדה את האמירות ואת העשייה הקודמות כדי לנסח את הנרטיב המרכזי לנושא זה.

* המילים המודגשות מעידות על כך שהמרצה התייחסה לדבריה שלה כאל אמירה מחדש של דברי הסטודנטית.

1.5 שיח הבין-אישי

ננתח כעת את השיח הבין-אישי כפי שהוא מצטייר משלושת חלקי הדוגמה. אפשר לראות שסטודנטיות שונות ממצבות את עצמן בצורה אחרת מול המתמטיקה ומול הקבוצה שאִתה הן עבדו. בעוד נעמי פתחה בביקורת על השיטה שבה בחרה לעבוד, וייתכן שגם על עצמה כלומדת מתמטיקה "אני כאילו עבדתי בשיטה מפגרת" (49) הציגה אריאל את עצמה כנציגה של הקבוצה וביקשה לתפוס את מקומה במליאת הכיתה. באמירה של אריאל "אני אגיד לך מה רשמנו?" (100) יש התייחסות לשלוש ישויות: **אני** הסטודנטית, **לך** – המרצה, **רשמנו** – אנחנו חברי הקבוצה, ואני הנציגה שלהן במליאה.

בחלקים I ו-II של הדוגמה המרצה מְפנה את הבמה ונותנת לסטודנטיות מקום מרכזי להסביר את הדרכים שבהן עבדו וכן מבקרת את דברי הסטודנטיות. בחלק הראשון תיקנה המרצה את השימוש של הסטודנטית במילים (60), המלילה את תנועות הידיים של הסטודנטית (56) ובסוף אף ביקרה את ההסבר (99). בחלק השני ערערה המרצה על דברי אריאל (105) מתוך עמדה של מי שקובעת מה נכון ומה לא, מה יהפוך למקובל ומה לא – "זה נראה **לי**": המרצה היא שבוחרת את הנרטיב והיא שקובעת אם נרטיבים הם מסובכים יותר או פחות.

נראה שהתגובות של הסטודנטיות משקפות את תגובת המרצה. המרצה מעצימה את נעמי, ונעמי נכונה להסביר את אותה "שיטה מפגרת" לבקשת המרצה. כלומר, נראה שהסטודנטית אינה נרתעת בשום שלב להמשיך ולדבר. בחלק II המרצה אינה מקבלת את הנרטיב של אריאל, ואריאל בתגובה, לא בהכרח מודעת, עוברת לדבר כאילו היא מייצגת את עצמה ולא את הקבוצה כולה, וכן עוברת לניסוח יום-יומי יותר.

סיכום דוגמה 1: בחלק זה ראינו מצב שבו המרצה מעודדת את התלמידות לחשוף שני נרטיבים (כללי-על) שונים זה מזה למציאת שיפוע של ישר ומעמתת ביניהם. אנחנו טוענות שחשיפה זו של הנרטיבים והדיון הפומבי לגביהם היא מרכזית במנגנון המאפשר שינוי בשיח. בדוגמה שלהלן נראה מצב שבו חשיפה כזו אינה מתקיימת. טענתנו היא שאי-החשיפה מעכב את הלמידה.

2. דוגמה שנייה

חלק שיח זה התנהל בשיעור השמיני של הקורס והייתה בו שיחה בין שלוש סטודנטיות: מאי, מריה ויפה במהלך עבודה קבוצתית. הסטודנטיות התבקשו לקבוע עבור כל

פונקציה הנתונה בעזרת ביטוי סימבולי אם היא קווית. ניתוח הקטע יתייחס לשיח המתמטי של הלומדות בלבד.

163	מאי:	פשוט אני יודעת שהמקדם של ה-x אז זה השיפוע. [y=2x+1]
....		...
325	מאי:	כי השיפוע הוא שתיים, אז הוא לא משתנה!
326	מריה:	איך בדקת שהשיפוע לא משתנה?
327	מאי:	כי שתיים לא משתנה! שתיים תמיד שתיים.
328	מריה:	הצבת מספרים אחרים ו...
329	מאי:	זה לא משנה, שתיים הוא שתיים! שתיים זה לא שתיים? שתיים יכול להיות ארבע?
330	מריה:	אולי השיפוע הזה משתנה?
331	מאי:	אני...
332	יפה:	אם היא קווית אז זה לא משתנה! אבל אם...
333	מאי:	אבל שתיים זה שתיים
.....		....
343	מאי:	איך השתיים יכול להשתנות – שתיים זה שתיים!
344	מריה:	אבל אם את מציבה x אחר אז שתיים, אולי
345	מאי:	אבל השיפוע תמיד יהיה שתיים, תמיד הוא פעמיים ה-x
346	מריה:	אבל צריכים לבדוק את זה
347	מאי:	זה תמיד פעמיים ה-x
348	מריה:	זה המקדם של ה-x
349	מאי:	השיפוע לא ישתנה
350	מריה:	שנייה, רגע, אבל למה
351	יפה:	בנות, השיפוע בפונקציה הוא מקדם ה-x
352	יפה:	יאללה, זה נגיד, לא נגיד, אבל זה [y=6x-2] השיפוע הוא שש.
353	מאי:	עכשיו 4 חלקי x, אז הוא משתנה, הוא נהייה [$y=\frac{4}{x}$]
354	מאי:	כי ארבע חלקי x ה-x משתנה, ה-x משתנה לך
355	מריה:	למה? אבל גם פה זה שתיים כפול x,
356	יפה:	אה, את רואה, היא לא מסבירה למה. היא לא יודעת למה?
357	מאי:	כי פה, כי פה זה גם יצא, לפי זה [צוחקת]
358	יפה:	היא לא יודעת למה

כדי לאפיין את השיח המתמטי של כל אחת מהמשתתפות וכדי לזהות את התפקיד של כל אחת מהן בקבוצה קיבצנו לחוד את דבריה של כל סטודנטית וניתחנו אותם בנפרד. לבסוף התייחסנו לשיח הקבוצתי.

2.1 תורֵי הדיבור של מאי

163. פשוט אני יודעת שהמקדם של x, אז זה השיפוע.
325. כי השיפוע הוא שתיים, אז הוא לא משתנה! [y=2x+1]
327. כי שתיים לא משתנה! שתיים תמיד שתיים.
329. זה לא משנה, שתיים הוא שתיים! שתיים זה לא שתיים? שתיים יכול להיות ארבע?
333. אבל שתיים זה שתיים
343. איך השתיים יכול להשתנות – שתיים זה שתיים!
345. אבל השיפוע תמיד יהיה שתיים, תמיד הוא פעמיים ה-x
347. זה תמיד פעמיים ה-x
349. השיפוע לא ישתנה
353. עכשיו 4 חלקי x, אז הוא משתנה, הוא נהייה $[y=\frac{4}{x}]$
354. כי ארבע חלקי x ה-x משתנה, ה-x משתנה לך
357. כי פה, כי פה זה גם יצא, לפי זה [צוחקת]

מאי פתחה בהצהרה על הנרטיב שבאמצעותו היא זיהתה את שיפוע הפונקציה הנתונה על ידי המתווך הסימבולי y=2x+1: "המקדם של x, אז זה השיפוע" (163). ההקדמה לאמירה זו: "פשוט אני יודעת" מעידה על כך שמאי זיהתה ידע רלוונטי שיש לה, ושהיא אינה יודעת מדוע הוא נכון או מהו התהליך שהביא לבנייתו. היא אינה מתייחסת להקשר שבו הנרטיב "המקדם של x הוא שיפוע הפונקציה" מתקיים, כלומר במקרה שבו הייצוג הסימבולי של הפונקציה הוא מהצורה y=ax+b.

בתורים האלה (327, 329, 333, 343, 345) הסבירה מאי מדוע האמירה "השיפוע הוא 2" מהווה הסבר לכך שהשיפוע אינו משתנה. בהסבריה יש חזרה על כך ששתיים הוא מספר, וככזה הוא קבוע. היא אינה מנסה לברר מדוע ההסבר אינו מספק, ורק חוזרת על אותה אמירה.

בתורים 353 ו-354 התייחסה מאי לביטוי סימבולי חדש: $y=\frac{4}{x}$. ביטוי זה אינו מהצורה y=ax+b ולפיכך הנרטיב "המקדם של x הוא השיפוע" אינו רלוונטי מבחינת השיח המתמטי המקובל. מאי צודקת שעבור ביטוי זה אין שיפוע קבוע. היא מנסה להסביר זאת באמצעות חזרה על האמירה ש"הוא" משתנה, אולם לא ברור למה מתייחסת המילה 'הוא'. כלומר, יש כאן שינוי במיקוד הדיון (משינוי בשיפוע בתורים קודמים לשינוי ב-x בתור 354). ב-354 מאי מציינת שהדבר שמשתנה הוא ה-x ואף חוזרת על כך

פעמיים. ההסבר של מאי אינו מסביר (353, 354): את האמירה ש-x משתנה היה אפשר לומר עבור הביטוי הקודם (y=2x+1) ולהגיע למסקנה אחרת.

בתורים 357 ו-362 מאי צוחקת. נראה שצחוק זה מעיד על מבוכה שאותה היא מבטאת ב-362. מאי היא הסטודנטית המובילה בדרך כלל את הדיונים המתמטיים בכיתה. כאן היא מודה בפומבי שאינה יודעת להסביר (אף על פי שהיא בטוחה בנכונות תשובותיה).

2.2 תורֵי הדיבור של מריה

326. איך בדקת שהשיפוע לא משתנה?
328. הצבת מספרים אחרים ו...
330. אולי השיפוע הזה משתנה?
344. אבל אם את מציבה x אחר אז שתיים, אולי
346. אבל צריכים לבדוק את זה
348. זה המקדם של ה-x
350. שנייה, רגע, אבל למה
355. למה? אבל גם פה זה שתיים כפול x.

מריה ניסתה לברר מהי הרוטינה שעל פיה פעלה מאי ומהי ההצדקה לשימוש ברוטינה זו. בתור 326 היא שאלה ישירות "איך בדקת שהשיפוע לא משתנה?" מניסוח השאלה אפשר לראות שהיא מקבלת את הקביעה המתמטית של מאי שהשיפוע קבוע, אולם היא מעוניינת ללמוד מהי ההצדקה לכך. כיוון שבתור העוקב לא סיפקה לה מאי מענה ניסתה מריה לגייס את הרוטינה שהכירה בשאלה הקודמת כדי לקבוע אם לפונקציה המוצגת בעזרת מתווך סימבולי יש שיפוע קבוע. הרוטינה כללה הצבה של שיעורי x של כמה נקודות, חישוב שיעורי ה-y המתאימים ובדיקת מנת ההפרשים. אם מנה זו אינה קבועה, הפונקציה אינה קווית.

תורים 330, 344 ו-346 נפתחים במילים **אולי** או **אבל**. מילים אלו מעידות על כך שמריה ערערה על הקביעה של מאי. היא ציפתה עדיין להסבר ממאי לגבי הקביעה כי השיפוע קבוע. ערעור זה מתעצם בתורים 350 ו-355 עם השאלה "למה?"

כל האמירות של מריה מצטרפות לכך שהיא עומדת על זכותה להבין את הנעשה ואינה מסתפקת ב"חזרה" אחרי חברותיה לקבוצה. בכך היא מביעה גם את עמדתה כלפי המתמטיקה – תחום תוכן שבו יש סיבות הניתנות להבנה, ויש מקום לחדד תובנות אלו בקבוצה.

2.3 תורֵי הדיבור של יפה

332. אם היא קווית אז זה לא משתנה! אבל אם...
351. בנות, השיפוע בפונקציה הוא מקדם ה-x
352. יאללה, זה נגיד, לא נגיד, אבל זה [y=6x-2] השיפוע הוא שש.
356. אה, את רואה, היא לא מסבירה למה. היא לא יודעת למה?

נראה שיפה מנסה לגשר בין השיח של מאי בנוגע לשיפוע לבין זה של מריה. בתור 332 היא ממקדת את הדיון ומדגישה שטענתה של מאי נכונה עבור פונקציה קווית. תור 351 מהווה אמירת-על לגבי האמירה של מאי. בעוד מאי מתייחסת לשיפוע של פונקציה מסוימת, נראה שיפה מנסה לנסח את הנרטיב הרלוונטי למציאת שיפוע של פונקציה קווית המתוארת באמצעות מתווך סימבולי. לפי האמירה בתור הדיבור הבא: "יאללה" (352) והמעבר שלה לסעיף הבא (y=6x-2) נראה שמבחינתה של יפה ניסוח הנרטיב גישר בין סוגי השיח והקונפליקט נפתר, אולם מריה ומאי אינן ממשיכות לסעיף הבא. בתור 356 יפה מתייחסת במפורש לכך שבאמירותיה השונות של מאי אין הסבר לגבי הצדקת הנרטיב שלה. היא פונה לחברות הקבוצה ומתייחסת למאי בדיבור עקיף ("היא"). יפה מעלה השערה שמאי אינה יודעת מדוע דבריה ודרך הפעולה שלה נכונים. אמירה זו מעידה על כך שיש ציפייה שמאי תדע להסביר מדוע דבריה נכונים.

2.4 סיכום

בדוגמה זו לא מתרחשת למידה. ניסינו להסביר מדוע אין התפתחות בשיח של הלומדות כאן. מריה קבעה עד כה אם פונקציה היא קווית או לא באמצעות הצבה של 3 נקודות בנוסחת השיפועים והשוואה בין המספרים שהתקבלו, והיא מזהה שמאי נעזרת בכלל-על אחר שהוא יעיל יותר מתהליך ההצבה ומנסה מפורשות לברר מהו, לפיכך מדובר בניסיון ללמידת כללי-על חדשים. מהשיח של מאי אפשר להסיק שאם היא מזהה ביטוי מהצורה y=ax+b היא יודעת לקבוע מהו השיפוע (a) ומזהה את הביטוי כמייצג פונקציה קווית. אם הביטוי אינו מצורה זו היא קובעת שהפונקציה לא קווית, אך אינה יודעת להסביר מדוע.

יש כאן הסכמה שמאי יודעת כלומר, שהשיח המתמטי שלה הוא המקובל, ושהיא המובילה את השיח המתמטי בקבוצה. המשתתפות סומכות על מאי.

ליפה, המשתתפת השלישית בקבוצה, נראה שיש תפקיד אחר. היא מנסחת בצורה מפורשת את הנרטיבים שלדעתה מנחים את הפעולה של מאי. כך ב-351 יפה מנסחת את הנרטיב "השיפוע בפונקציה הוא מקדם ה-x," ובכך היא מצביעה במפורש על כך שמאי

אינה ממלאת את תפקידה כמובילה את השיח המתמטי ("היא לא מסבירה למה") ומעלה את ההשערה שייתכן שמאי אינה יודעת למה (356).

על פי ספרד (Sfard, 2008) כדי שתתרחש למידה ברמת-על כללי-העל צריכים להיות במוקד הדיון ואמורים להתקיים, בין השאר, שני התנאים האלה: (1) הסכמה לגבי מי שמוביל את השיח הלימודי; (2) הסכמה לגבי התפקידים של המשתתפות בשיח. במקרה שלנו שני התנאים מתקיימים.

לכאורה הייתה צריכה להיות כאן התקדמות בשיח המתמטי של המשתתפות, אבל המשתתפת המרכזית שאמורה להוביל את השיח אינה ממלאת את תפקידה מכיוון שהיא אינה מסבירה את הנרטיבים המנחים את קביעותיה, כלומר חסרה בקבוצה משתתפת מומחית. ייתכן שבחלוקת תפקידים אחרת או בהינתן עוד זמן היו המשתתפות יחד מצליחות לנסח את כללי-העל הרלוונטיים. ההתקדמות תתאפשר כאשר תהיה חשיפה של הנרטיבים או הרוטינות שעל פיהם פועלים. דבר זה מדגיש את תפקיד המורה כמתווכת, כלומר לברר מהם הדברים שעל פיהם אנשים פועלים, ואז יהיה אפשר לקדם את השיח, כלומר תתאפשר למידה.

דיון

בחלק זה נענה על שאלות המחקר על פי שתי הדוגמאות שנותחו. חשוב לציין שדוגמאות אלו מייצגות את השיח האופייני שהתפתח בכיתה זו במהלך 14 שיעורים.

כדי לענות על השאלה **כיצד מתפתח שיח חדש משיח קודם של הלומדים** נתייחס לכל אחת משלוש תת-השאלות:

(1) **מהם השינויים הניתנים לזיהוי בשיח המתמטי של הסטודנטיות?** השיח המתמטי הנדון במאמר זה הוא שיח הסטודנטיות בנוגע לפונקציות קוויות בכלל ובנוגע לשיפוע בפרט. השיח המתמטי על פונקציות כולל שיח על כל אחד מהמתווכים הוויזואליים של פונקציה, במקרה זה – גרפים וביטויים סימבוליים. שיח הסטודנטיות בנוגע למתווך הגרפי התפתח מבחינת הנרטיבים והרוטינות הקשורים להשוואה בין שיפועי קטעים (דוגמה 1). המרצה ניסחה בעזרת הסטודנטיות רוטינה (כלל-על) המאפשרת להשוות בין "תלילות" של קטעים. לעומת זאת, שיח הסטודנטיות בנוגע לביטויים סימבוליים (דוגמה 2) לא התפתח. לא נוסח כלל-על המאפשר זיהוי של פונקציה קווית בהינתן ביטוי סימבולי.

(2) **מה אִפשר את ההתפתחות?** ההתפתחות שאליה נתייחס היא זו של הנרטיב והרוטינה שבאו לידי ביטוי בדוגמה 1. פעולות התיווך של המרצה כפי שבאו לידי

ביטוי בשיח המתמטי, הפדגוגי והבין-אישי הן שאִפשרו את ההתפתחות. מבחינת השיח המתמטי בחרה המרצה את דף הפעילות (איור1) כמתווך ויזואלי שעשוי לעודד התפתחות משיח יום-יומי (קטע תלול) לשיח מתמטי (שיפוע גדול יותר). כמו כן זיהתה המרצה בדבריה של נעמי בסיס שממנו הייתה יכולה לבנות את הנרטיב המתמטי המקובל שבו הייתה מעוניינת. המרצה דחתה נרטיב אחר שלא אִפשר ניסוח של רוטינה למציאת שיפוע הנובע ישירות מהנרטיב. תוך כדי כך הצביעה המרצה על עיקרון מתמטי חשוב ששימש לבחינת היעילות של שני הרעיונות שהועלו: המרצה דיברה על "כלליות" הנרטיב, אך נראה שלמעשה מדובר בניסוח רוטינה שאפשר לפעול לפיה.

השילוב בין שלוש הרוטינות הפדגוגיות של המרצה שהוצגו כאן: (1) הצמחת הרעיונות המתמטיים מדברי הסטודנטיות; (2) נתינת הבמה לסטודנטיות; (3) חזרה על קול הסטודנטיות עודדו שיח שבו הסטודנטיות אחראיות להעלות את הרעיונות המתמטיים ולבקר אותם על בסיס מתמטי. השיח הבין-אישי שנוצר אִפשר גם לסטודנטיות שהמיצוב שלהן כלפי המתמטיקה היה חזק פחות (נעמי) להפוך למשתתפות מרכזיות בשיח הכיתתי.

(3) **מה עיכב את ההתפתחות?** נראה שבשיח הקבוצתי היה חסר מומחה תוכן שיבין את הנרטיב של כל סטודנטית ויוכל לתווך בין הרעיונות המתמטיים למיניהם שהועלו. אחת הסטודנטיות ניסתה לעזור לשתיים האחרות לקשר בין מגוון הרוטינות והנרטיבים שבהם השתמשו אך בלא הצלחה. לא הייתה חשיפה מפורשת של כללי-העל. ייתכן שתופעה זו ייחודית ללומדות ב"סבב שני", כמו מאי, הזוכרות רוטינות למיניהן בלי ההקשר או ההצדקה שניתנה להן.

השלכות

כלי המחקר שבו השתמשנו לניתוח השיח הכיתתי מאפשר להתמקד בשלושה סוגי תפקודים המתרחשים בו בזמן בכיתה – התוכני, הבין-אישי והפדגוגי. לכל אחד מהשלושה יש תרומה ייחודית אחרת. כדי להבין את המורכבות של תהליכי ההוראה והלמידה יש להתייחס לכל אחד מהשלושה ולקשר ביניהם.

משתתפי שיח בוחרים כיצד לנסח את אמירותיהם במהלך השיח. בחירות אלו משקפות שלושה תפקודים: התוכני, הבין-אישי והפדגוגי. המרצה בקהילת הלומדים הוא משתתף עיקרי בשיח, ויש לו אחריות לעזור ללומדים להפוך לחברים בולטים בקהילה.

מודעות לשלושת תפקודי השיח יכולה לעזור למרצָה לכוון את בחירות השיח שלה כדי לקדם את הקהילה כולה.

בהיבט התוכני: נראה שיש חשיבות להתייחסות לנרטיבים ולרוטינות המרכזיים לנושא הנלמד. חשוב לחשוף אותם באופן מפורש ולקשר ביניהם. נרטיבים מתמטיים הם ההיגדים המקובלים על אנשי הקהילה. רוטינות מתייחסות לעשייה מתמטית. במקרה שלפנינו יהיה הנרטיב מנוסח בדרך של: "שיפוע הוא..." ואילו הרוטינה המתאימה תהיה מנוסחת: "כדי לחשב שיפוע יש לבצע...". הנרטיב והרוטינה מתייחסים לאותם אובייקטים מתמטיים אך הנרטיב מנוסח באופן דקלרטיבי ואילו הרוטינה – כפעולות לביצוע.

בהיבט הבין-אישי: המרצה העצימה את הסטודנטיות ואת ההתקדמות שלהן. נראה שטיפוח זה הוא שאִפשר את התפתחות השיח המתמטי שלהן.

בהיבט הפדגוגי: המרצה ביצעה מגוון פעולות כדי לארגן את השיח המתמטי כך שהסטודנטיות יהיו משתתפות בולטות יותר בשיח. בין השאר נקטה המרצה שיטות של חזרה על קול הסטודנטית (revoicing) כאסטרטגיה פדגוגית אשר שימשה בו בזמן להעצמת הרעיון שהציעה הסטודנטית ולניסוח מחודש של הרעיון כך שיהיה תואם יותר לנרטיבים המתמטיים.

כדי לאפשר לסטודנטיות לפתח את השיח המתמטי שלהן יש צורך במרצה מומחה תוכן היודע להשתמש בשיח הפדגוגי והבין-אישי להשגת מטרה זו. כדי ששיח יתקדם צריך להיות משתתף מוביל אשר יכול לספק את הפיגומים הרלוונטיים לחשיפה מפורשת של נרטיבים ורוטינות הרלוונטיים לנושא הנלמד. זה המקום הטבעי של המורה, אך זה יכול להיות גם תלמיד.

מקורות

נחליאלי, ט' ורגב, ח' (2009). **אירועים מעודדי למידה וחשיבה ואירועים בולמי למידה וחשיבה בשיעורי מתמטיקה**. תל אביב: דוח מסכם שהוגש למכון מופ"ת.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21,* 521-544.

Forman, E. A., & Ansell, E. (2002). Orchestrating the multiple voices and inscriptions of a mathematics classroom. *The Journal of the Learning Sciences, 11(2&3),* 251-274.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Edward Arnold.

Halliday, M. A. K., & Matthiessen, C. M. I. M. (2004). *An introduction to functional grammar* (3rd ed.). London: Arnold

Koichu, B. (2013). Networking theories by iterative unpacking. *CERME 8 - Eight Conference of European Research in Mathematics Education*. Retrieved February 14, 2013 from http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Koichu.pdf

Martin, J. R., & Rose, D. (2005). *Working with discourse: Meaning beyond the clause*. Continuum: London, New York.

Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics, 55***,** 49-80.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012a). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research, 51&52,* 10-27.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012b). Combining theories to analyze classroom discourse: An example. *Proceedings of the 12th Internaational Conference of Mathematics Education.* Seoul, Korea.

O'Connor, M. C., & Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks. In D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning and schooling* (pp.63-103). Cambridge: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1977). *The development of thought: Equilibration of cognitive structures.* Oxford, England: Viking.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* London: Routledge and Kegan Paul.

Schoenfeld, A. H., Smith III, J. P., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology, 4,* pp. 55-175. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schwarts, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concepts? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30 (4),* 362-389.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of Learning Science*, *16(4),* 1-47.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (2011). Combining theories to analyze classroom discourse: A method to study learning processes. *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzeszow, Poland.

Walter, J., & Gerson, H. (2000). Teachers personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 65 (2),* 203-233.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations* (GEM Anscombe, Trans.) Oxford, UK: Blackwell.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education, 37(5),* 356-387.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 119-140.