# דרך פשוטה לעבור את מחסום המעלה השלישית

**אבנר דור**

## מבוא

מקובל לחשוב שמשוואה ממעלה שלישית נמצאת בדרגת סיבוך גבוהה הרבה יותר ממשוואה ממעלה שנייה. ננסה כאן להפריך זאת. נראה איך בעזרת טריק די פשוט מתקבל פתרון כללי למשוואה ממעלה שלישית בשיטות של בית-ספר תיכון. הפתרון המוצע כאן ניתן על-ידי Girolamo Cardano בשנת 1545 וניתן למצוא הצגה דומה שלו ב-[1] עמ' 196-198. על אף המתמטיקה המשוכללת והמבריקה של המאה ה- 20 צריך לזכור שבמאה ה- 16 היה פתרונו של Cardano הישג מדהים.

## תיאור הבעיה ושיטת הפתרון

נתונה משוואה מהצורה:

$$(1)\ a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

כאשר $a_0, a_1, a_2, a_3$ הם קבועים ו $a_3 \neq 0$. אנחנו מחפשים נוסחה אלגברית שתיתן את המספר x הפותר את המשוואה, באמצעות $a_0, a_1, a_2, a_3$, בדומה לנוסחת הפתרון הידועה של משוואה ריבועית. לשם כך נבצע מספר רדוקציות של הבעיה, שיביאו אותנו בכל שלב למשוואה, או מערכת משוואות, פשוטות יותר, עד שבסופו של דבר נגיע למשוואה ריבועית רגילה .

## הפתרון

ראשית, נוח יותר עבורנו שהמקדם של $x^3$ יהיה 1. את זאת נקבל אם נחלק ב- $a_3$ את המשוואה ב-(1).
אם כך נגדיר:

$$b_2 = a_2/a_3$$
$$b_1 = a_1/a_3$$
$$b_0 = a_0/a_3$$

ונקבל את המשוואה השקולה:

$$(2)\ x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

עד עתה הכל די טריוויאלי ועדיין לא התקדמנו (כפי שהבטחנו) לקראת משוואה פשוטה יותר, ניגש אם כך ל:

<u>שלב ראשון בפתרון</u> :הרדוקציה המשמעותית הראשונה שנבצע, מטרתה להיפטר מהגורם במעלה השנייה. נעשה זאת על-ידי ההצבה:

$$y = x + b_2/3$$

כלומר $x = y - b_2/3$

כאשר נציב זאת במשוואה (2) נקבל:

$$(3)\ 0 = (y - b_2/3)^3 + b_2 (y - b_2/3)^2 + b_1(y - b_2/3) + b_0 =$$
$$(y^3 - 3b_2y^2/3 + 3b_2^2y/9 - b_2^3/27) + (b_2y^2 - 2b_2^2y/3 + b_2^3/9) + (b_1y - b_1b_2/3) + b_0 =$$
$$= y^3 + (b_1 - b_2^2/3)y + (2b_2^3/27 - b_1b_2/3 + b_0)$$

נפטרנו אם כך מהגורם מסדר שני, וכדי שהביטוי שהתקבל לא ייראה כל-כך מסובך ומבלבל, נציב :

$$(4)\ a = b_1 - b_2^2/3$$
$$b = - (2b_2^3/27 - b_1b_2/3 + b_0)$$

ואז מקבלים:

$$(5)\ y^3 + ay = b$$

עתה מה שנותר לעשות הוא לפתור את המשוואה שב- (5). אכן משוואה זו לכאורה פשוטה יותר מהמשוואה המקורית, אך אם ננסה ל"שחק" איתה ולבצע בה מניפולציות ליניאריות מהסוג שעשינו עד עכשיו, נראה שלא ניתן להתקדם ממנה לביטוי פתיר יותר, כלומר למשוואה ממעלה שנייה. רעיון הפתרון טמון בשלב הבא, שבו נבצע תרגיל קצת שונה.

<u>שלב שני של הפתרון:</u>

נציב עתה במשוואה (5):

$$y = y_1 + y_2$$

נקבל מכך:

$$\begin{aligned} b &= (y_1 + y_2)^3 + a(y_1 + y_2) = \\ &= y_1^3 + 3y_1^2y_2 + 3y_1y_2^2 + y_2^3 + a(y_1 + y_2) = \\ &= y_1^3 + y_2^3 + 3y_1y_2(y_1 + y_2) + a(y_1 + y_2) = \\ &= y_1^3 + y_2^3 + (3y_1y_2 + a)(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

(בדוק!)

התקבל אם כך השוויון :

$$(6)\ b = y_1^3 + y_2^3 + (3y_1y_2 + a)(y_1 + y_2)$$

המטרה היא למצוא $y_1$ ו $y_2$ המקיימים את (6). ברור שנגיע מכך ל $y$, - אך בינתיים יש כאן משוואה אחת עם שני נעלמים שלא נראית פשוטה מהמשוואה המקורית. אלא שבמקום לפתור ישירות את (6) נפתור את צמד המשוואות הבא, שכל פתרון שלו פותר את (6).

$$(7)\ b = y_1^3 + y_2^3$$

$$(8)\ -a/3 = y_1y_2$$

אכן, קל לראות שכאשר $y_1$ , $y_2$ פותרים את (7) ו- (8) הם פותרים את המשוואה (6), אך עדיין לא ברור למה קל יותר לפתור את צמד המשוואות (7) ו-(8). את זאת יבהיר השלב הבא.

<u>שלב שלישי של הפתרון</u>

זהו השלב הסופי. נראה קודם כל שמהמשוואות (7) ו- (8) פתירות באמצעים קונבנציונליים. לשם כך במקום המשוואה (8) נרשום את המשוואה הבאה ששקולה לה:

$$*(8)\ -a^3/27 = y_1^3y_2^3$$

עכשיו התמונה מתחילה להתבהר. אנחנו מעוניינים לפתור את צמד המשוואות (7) ו- *(8) כשבעצם אנחנו רוצים למצוא את $y_2^3$ ו $y_1^3$. -אלו יהיו הנעלמים שלנו כעת. לשם הדגשה נרשום:

$$z_1 = y_1^3$$
$$z_2 = y_2^3$$

ואז, אם נביע את המשוואות (7) ו- *(8) באמצעות $z_1$ , $z_2$ נקבל:

$$(9)\ b = z_1 + z_2$$

$$(10)\ -a^3/27 = z_1 z_2$$

ידוע שצמד המשוואות (10) ו- (9) יכול להיפתר על-ידי משוואה ריבועית, ואכן אם נציב $z_1 = b - z_2$ :

נקבל מ10 (-): $-a^3/27 = z_1(b - z_1)$

כלומר :

$$(11)\ z_1^2 - bz_1 - a^3/27 = 0$$

ואם כך:

$$z_1 = (1/2)(b + (b^2 + 4a^3/27)^{1/2})$$

נסתפק כרגע בפתרון אחד של המשוואה הריבועית שב- (11). עניין זה מוסבר בהערה הבאה. באופן דומה מקבלים עבור $z_2$:

$$z_2 = (1/2)(b - (b^2 + 4a^3/27)^{1/2})$$

(ברור בשלב זה שהפתרון השני של המשוואה הריבועית ב11(-) רק מביא להחלפת הסדר בין $z_1$ ו $z_2$ - ואינו מוסיף דבר.)

עכשיו נרשום את הפתרון המלא למשוואה (5):

$$y = y_1 + y_2 = z_1^{1/3} + z_2^{1/3} =$$
$$= 2^{-1/3}((b + (b^2 + 4a^3/27)^{1/2})^{1/3} + (b - (b^2 + 4a^3/27)^{1/2})^{1/3})$$

עתה, כדי לקבל את פתרון המשוואה שב- (2), כל שנותר הוא להציב במקום a ו b -את הביטויים המתאימים שב- (4) ולהיזכר ש. $x = y - b_2/3$ :

**סיכום**

מספר הערות לפתרון המוצע:

1. מצאנו פתרון אחד למשוואה ממעלה שלישית, אך ידוע מהתורה הכללית של האלגברה, שישנם עד שלושה פתרונות. אם נרצה למצוא את כל הפתרונות, נשתמש בפתרון האחד שמצאנו כדי להגיע למשוואה מהמעלה השנייה שבה "טמונים" הפתרונות הנוספים. פרטי הדרך הזו הם אמנם אלמנטריים, אך חורגים ממסגרת המאמר הזה.

2. אם אנחנו מגבילים את עצמנו למספרים ממשיים, אז הפתרון המוצע מוגדר רק כאשר $b^2$ 3 $-4a^3/27$.
אך למרות זאת ידוע **שתמיד** ישנו פתרון ממשי אחד לפחות למשוואה ממעלה שלישית עם מקדמים ממשיים. הצרה היא שהפתרון המוצע כאן עלול להיות מספר מרוכב לא ממשי, למרות שישנו פתרון (אחר) ממשי .
מכל מקום, יש לכך תשובה, בתנאי ש"נכיר" בקיומם של המספרים המורכבים. ניתן להשתמש תמיד בהערה (1) כדי למצוא את **כל** הפתרונות למשוואה ממעלה שלישית (כולל פתרונות לא ממשיים) ובדרך זו למצוא גם את הפתרונות הממשיים.

3. בסופו של דבר הביאו קשיים מסוג זה להתפתחות התורה של המישור המורכב, הכולל את המספרים הממשיים, תורה שהפכה ברבות הימים לאחד מעמודי התווך של המתמטיקה .

לסיום, הערה שאינה נוגעת לחוקי המתמטיקה שקיומם עומד מעל הזמן, ואינו תלוי בזמן, אלא לטבע האדם שעשוי להשתנות. "מקובל" שאת הפתרון קיבל Cardano ממתמטיקאי חבר בשם Tantagila אחרי שנשבע שישמור אותו בסוד. המאמר שבידך מעיד עד כמה נשמר הסוד הזה .

# ביבליוגרפיה

E. Borel, **L'Imaginaire et le Real en Mathimatiques et en Physique**, Editions Alvin Michael, Paris 1952.

J. D. Philip, R. Hersh, **The Mathematical Experience**, Birkhauser, Boston, Basel, Stuttgart, 1991.

W. L. Raymond, **Hereditary Stress as a Cultural Force in Mathematics, Historia Mathematica**, 1, 1974, 29-46.